Homotopie a homotopický operátor

Df homotopie a homotopické zobrazení

zobr. $H : \langle 0,1 \rangle \times M \to N$ nazýváme homotopie

hladkost homotopie je hladkost rozšířeného zobr

$H : I \times M \to N \qquad \langle 0,1 \rangle \subset I \subset \mathbb{R} \quad I$ otevř.

píšeme též $H(\tau, x) = H_\tau x \qquad H_\tau : M \to N \quad \tau \in \langle 0,1 \rangle$

zobrazení $f, g : M \to N$ jsou homotopické pokud existuje homotopie H tak, že $H_0 = f \quad H_1 = g$

Th: hladkost homotopie [Lee]

$f : M \to N$ spojité mezi hladkými var. $\Rightarrow$

f je homotopické s hladkým zobrazením $g : M \to N$

$f, g : M \to N$ spojitě homotopické $\Rightarrow$

f, g hladce homotopické

netřeba rozlišovat spojitou a hladkou homotopii.

Homotopické invarianty

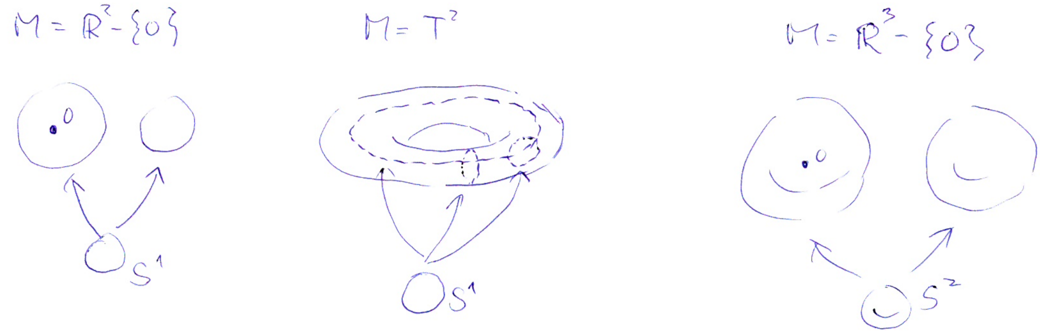
homotopičnost je ekvivalence na zobrazeních $N \to M$

$C(N,M)$ - prostor tříd ekvivalence

$C(N,M)$ je top. invariant páru topol. prostorů M, N
tj. nezávisí na homeomorfismech M a N

volba standardních prostorů N - sféry S^p

prvek $C(S^p, M)$ (tj. třída homotop. ekv. zobr. $S^p \to M$)
reprezentuje kvalit. odlišný způsob vnoření S^p do M



Tyto třídy jsou topol. inv. prostoru M
stejně tak jejich struktura (např. počet)

možnost přidat strukturu grupy $\to$ homotopické grupy $\Pi_p(M)$
pro $p>1$ grup. operace neintuitivní ale komutativní
pro $p=1$ grup. operace skládání smyček - intuitivní, nekomutativní
$\to$ fundamentální grupa

Homotopické ekvivalence kohomologických algeber

Def: homotopická ekvivalence variet $M \simeq N$

nav. M, N jsou homotop. ekviv., též stejného homot. typu pokud existují hladká zobr.

$f: M \to N \qquad g: N \to M$

taková, že

$g \circ f: M \to M$ je homotopické s id_M

$f \circ g: N \to N$ je homotopické s id_N

Pozn: homotop. ekvivalence je slabší než homeomorf. $f \circ g$ nemusí být inverzní, stačí že jsou homotopické k "inverzním"

Př: $\mathbb{R}^n \simeq$ bod

$f: \mathbb{R}^n \to B \quad f(x) = b$

$g: B \to \mathbb{R}^n \quad g(b) = x_0 \in \mathbb{R}^n$

$g \circ f: x \to x_0$ homotopické $id_{\mathbb{R}^n} \Leftarrow$ kontrahovatelnost

$f \circ g: b \to b$ přímo id_B

Př: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$ $\qquad S^{n-1} = \{x \mid |x| = 1\}$

$f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1} \quad f(x) = \frac{x}{|x|}$ $\qquad x = [x^1, \dots, x^n] \quad |x| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}$

$g: S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad g(x) = x$

$g \circ f: x \to \frac{x}{|x|}$ homotopické $id_{\mathbb{R}^n}$

$f \circ g: x \to x$ přímo $id_{S^{n-1}}$

Př: $M \times \mathbb{R} \simeq M$

$f = \pi \qquad g = i_0$

Th: M, N homeomorf. $\Rightarrow$ M, N homotop. ekviv.

důkaz: triviální

Th: M, N homeomorfní (M, N obloukově souvislé)

$\Rightarrow \pi_1(M, x_0) \quad \pi_1(N, y_0)$ isomorfní (topol. invariant)

Th: M, N homotopicky ekviv. (M, N obloukově souvislé)

$\Rightarrow \pi_1(M, x_0) \quad \pi_1(N, y_0)$ isomorfní

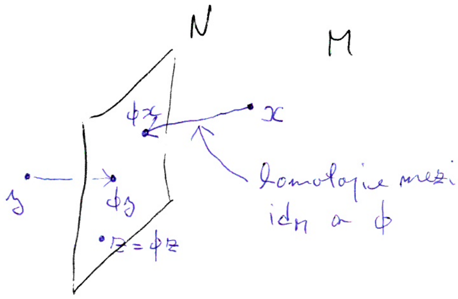
Kontrahovatelnost

Def: varieta M je kontrahovatelná na podvarietu N
(N je deformační retrakce variety M)
pokud existuje

$\phi : M \to N$ takové, že

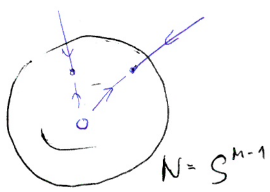
$\phi|_N = id_N$

ϕ je homotopické id_M



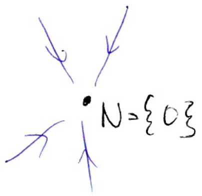
Př:

$M = \mathbb{R}^n - \{0\}$



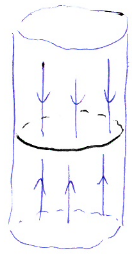
M kontrahovatelná na S^{n-1}

$M = \mathbb{R}^n$



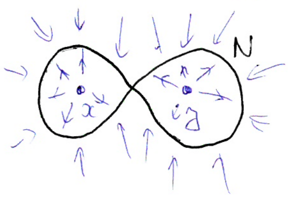
M kontrah. na bod

$M = \mathbb{R} \times \Sigma$



M kontrah. na Σ

$M = \mathbb{R}^2 - \{x, y\}$



M kontrah. na 8

Th: M je kontrahovatelná na N
$\Rightarrow$ M, N stejného homotopického typu (homotop. ekviv.)

Th: M je kontrahovatelná na N
$\Rightarrow$ $\pi_1(M, x_0)$ izomorfní s $\pi_1(N, x_0)$ $\quad x_0 \in N \subset M$

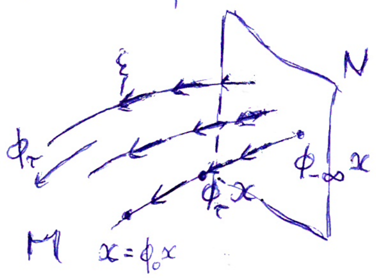
Def M je kontrahovatelná na podvarietu N pomocí toku ϕ_τ

ϕ_τ tok generovaný vekt. polem ξ

$\phi_0 x = x$

$\phi_{-\infty} x = \phi x \in N$

z def. kontrahov.



ϕ_τ generuje homotopii F_t

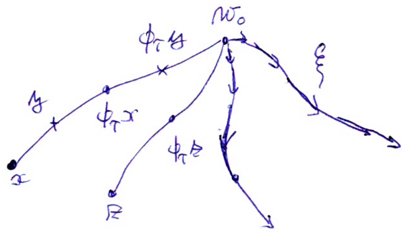
$F_t = \phi_{\log t}$ $\quad t = \exp \tau \quad t \in (0, 1) \Rightarrow \tau \in (-\infty, 0)$

Def: M je kontrahovatelné pomocí toku ϕ_τ $\equiv$

ϕ_τ tok na M generovaný ξ

$\phi_{-\infty} x = w_0 \in M \qquad \phi_0 x = x$

říkáme, že ϕ_τ kontrahuje M do bodu w_0



ϕ_τ generuje homotopii F_t
mezi $const_{w_0}$ a id

$F_t = \phi_{\log t} \qquad$ tj. $t = \exp \tau$

Th: (obrácené) Poincarého lemma

M je kontrah. pomocí toku ϕ_τ $\Rightarrow$

$$d\omega = 0 \Rightarrow \exists \alpha \quad \omega = d\alpha \qquad \omega \in \Lambda^{p+1} M \quad \alpha \in \Lambda^p M$$

navíc:

$$\alpha = \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \phi_\tau^*(\xi \cdot \omega)$$

důkaz:

konečnost integrálu: $\xi = \frac{D}{d\tau}\phi_\tau x \qquad \bar{\xi} = \frac{D}{dt} F_t x \Rightarrow \xi = \frac{dt}{d\tau}\bar{\xi}$

$$\alpha = \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \phi_\tau^*(\xi\cdot\omega) = \int_0^1 dt\, F_t^*(\bar{\xi}\cdot\omega) \quad \leftarrow \text{vše omezené}$$

$$d\alpha = d\int_{-\infty}^{0} d\tau\, \phi_\tau^*(\xi\cdot\omega) = \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \phi_\tau^*\big(d(\xi\cdot\omega) + \xi\cdot \underbrace{d\omega}_{0}\big) = \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \phi_\tau^* \mathcal{L}_\xi \omega$$

$$= \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \phi_\tau^* \frac{d}{d\varepsilon}\phi_\varepsilon^* \omega\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \frac{d}{d\varepsilon}\phi_{\tau+\varepsilon}^*\omega\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \frac{d}{d\tau}\phi_\tau^*\omega\Big|_\tau$$

$$= \phi_0^*\omega - \cancel{\phi_{-\infty}^*\omega}^{\,0} = \omega$$

$\phi_0 = id \qquad \phi_{-\infty} = const_{w_0}$

Homotopický oper.

$$\hat{F}\omega = \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \phi_\tau^*(\xi\cdot\omega) = \int_0^1 dt\, F_t^*(\bar{\xi}\cdot\omega)$$

$$d\hat{F}\omega + \hat{F}d\omega = \phi_0^*\omega - \phi_{-\infty}^*\omega$$
$$= F_1^*\omega - F_0^*\omega$$

$d\omega = 0$

$F_0 = \mathrm{const}_{w_0} \Rightarrow F_0^* = 0$

$F_1 = id \qquad F_1^* = id$

⇓

$$\omega = d\hat{F}\omega$$

užití pro homotopii a

$f = F_1 \quad g = F_0$ obecné

$f^*\omega - g^*\omega = d\hat{F}\omega + \hat{F}d\omega = d\hat{F}\omega$ exaktní

$d\omega = 0$ tj. kohomolog. ekviv.

pullback f^* definuje akci na • uzavř. forem a
• kohomolog. grupě

$f^* : \Omega N \to \Omega M \qquad \omega \to f^*\omega$

⇓

• $f^* : \Omega_{cl} N \to \Omega_{cl} M \qquad \omega \to f^*\omega \qquad df^*\omega = f^*d\omega = 0$

• $[f]^* : H_{dR}N \to H_{dR}M \qquad [\omega] \to [f]^*[\omega] = [f^*\omega] \qquad f^*(\omega + d\sigma) = f^*\omega + df^*\sigma$

f, g homotopické zobr. $\Rightarrow [f]^* = [g]^*$

$$[f]^*[\omega] - [g]^*[\omega] = [f^*\omega] - [g^*\omega] = [f^*\omega - g^*\omega] = [d\hat{F}\omega] = 0$$

Homotopický operátor

pro každou homotopii $H: M \to N$ zkonstruujeme speciální operátor $\hat{H}: \Omega^p N \to \Omega^{p-1} M$ dávající do vztahu pullbacky H_0^* a H_1^* vztahem

$$H_1^* - H_0^* = d\hat{H} + \hat{H} d$$

konstrukci začneme zkoumáním $\bar{M} = \mathbb{R} \times M$

označíme

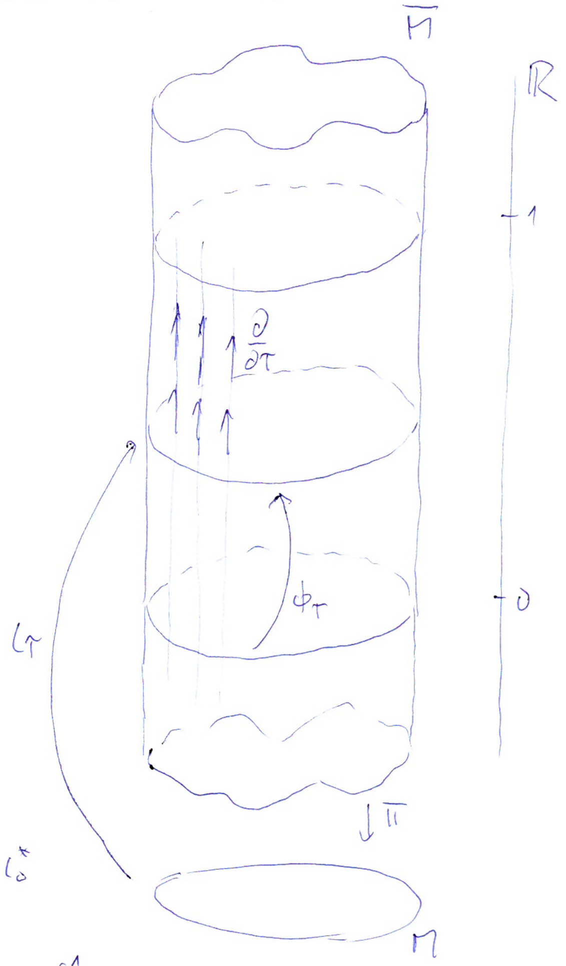
$\pi: \bar{M} \to M \qquad [\tau, x] \to x$

$\iota_\tau: M \to \bar{M} \qquad x \to [\tau, x]$

$\phi_{\Delta\tau}: \bar{M} \to \bar{M} \qquad [\tau, x] \to [\tau + \Delta\tau, x]$

$\frac{\partial}{\partial\tau}$ generátor ϕ_τ

$\iota_{\tau+\Delta\tau} = \phi_{\Delta\tau} \circ \iota_\tau \qquad \pi \circ \iota_\tau = id_M$



definujeme

$$K: \Omega^p \bar{M} \to \Omega^{p-1} M$$

$$K\bar{\omega} = \int_0^1 d\tau\, \iota_\tau^* \left(\frac{\partial}{\partial\tau} \cdot \bar{\omega}\right)$$

$$= \iota_0^* \int_0^1 d\tau\, \phi_\tau^* \left(\frac{\partial}{\partial\tau} \cdot \bar{\omega}\right)$$

oproti běžným def se liší znam. a pullbackem zpět na M - viz vytkn. ι_0^*

ekvivalence obou forem výše:

$$K\bar{\omega}|_x = \int_0^1 d\tau \left(\iota_\tau^*\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\cdot\bar{\omega}\right)\right)\Big|_x = \int_0^1 d\tau\, \iota_\tau^*\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\cdot\bar{\omega}\Big|_{[\tau,x]}\right) = \iota_0^* \int_0^1 d\tau\, \phi_\tau^*\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\cdot\bar{\omega}\Big|_{\phi_\tau[0,x]}\right)$$

$$= \iota_0^* \int_0^1 d\tau \left(\phi_\tau^*\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\cdot\bar{\omega}\right)\right)\Big|_{[0,x]} = \left(\iota_0^* \int_0^1 d\tau\, \phi_\tau^*\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\cdot\bar{\omega}\right)\right)\Big|_x$$ díky $\iota_\tau = \phi_\tau \circ \iota_0$

Def: homotopický operátor

$H: \langle 0,1\rangle \times M \to N$ homotopie

homotopický oper $\hat{H}$ definujeme

$$\hat{H}: \Omega^p N \to \Omega^{p-1} M \qquad \hat{H} = K H^*$$

kde K je def. výše

máme též

$$H_\tau = H \circ \iota_\tau \quad \Rightarrow \quad \iota_\tau^* \circ H^* = H_\tau^*$$

Th: pro homotop. oper. $\hat{H}$ homotopie $H_\tau : M \to N$ platí

$$H_1^* - H_0^* = d\hat{H} + \hat{H} d$$

důkaz:

nejdříve dokážeme lemma

$$dK + Kd = \iota_1^* - \iota_0^* \qquad (\text{jako oper. } \Omega^p \bar{M} \to \Omega^p M)$$

pro $\bar{\omega} \in \Omega^p \bar{M}$ máme

$$dK\bar{\omega} = d\,\iota_0^* \int_0^1 d\tau\, \phi_\tau^* \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\cdot\bar{\omega}\right) = \iota_0^* \int_0^1 d\tau\, \phi_\tau^*\, d\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\cdot\bar{\omega}\right)$$

$$dK\bar{\omega} + Kd\bar{\omega} = \iota_0^* \int_0^1 d\tau\, \phi_\tau^* \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\cdot d\bar{\omega} + d\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\cdot\bar{\omega}\right)\right) = \iota_0^* \int_0^1 d\tau\, \phi_\tau^* \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial\tau}} \bar{\omega}$$

$$= \iota_0^* \int_0^1 d\tau\, \phi_\tau^* \frac{d}{d\varepsilon} \phi_\varepsilon^* \bar{\omega} \Big|_{\varepsilon=0} = \iota_0^* \int_0^1 d\tau\, \frac{d}{d\varepsilon} \phi_{\tau+\varepsilon}^* \bar{\omega} \Big|_{\varepsilon=0} = \iota_0^* \int_0^1 d\tau\, \frac{d}{d\tau} \phi_\tau^* \bar{\omega} \Big|_\tau$$

$$= \iota_0^* \left[\phi_\tau^* \bar{\omega}\right]_0^1 = \iota_1^* \bar{\omega} - \iota_0^* \bar{\omega}$$

nyní formu $\bar{\omega}$ na $\bar{M}$ zadáme pomocí pullbacku homotopie

$$\bar{\omega} = H^* \omega \qquad \omega \in \Omega^p N \qquad \Rightarrow \qquad \iota_\tau^* \bar{\omega} = H_\tau^* \omega$$

$$\hat{H} : \Omega^p N \to \Omega^{p-1} M \qquad \omega \to \hat{H}\omega = K H^* \omega = K\bar{\omega}$$

dosazením do lemma dostaneme

$$dK\bar{\omega} + Kd\bar{\omega} = \iota_1^* \bar{\omega} - \iota_0^* \bar{\omega}$$

$\Downarrow$

$$d\hat{H}\omega + \hat{H} d\omega = H_1^* \omega - H_0^* \omega \qquad \text{c.b.d.}$$

význam homotop. op. se projeví při působení na uzavř. formy

Th: $f, g : M \to N$ homotopická zobr., $\omega \in \Omega^p N$ $d\omega = 0$ $\Rightarrow$ pullbacky $f^*\omega$ a $g^*\omega$ jsou kohomolog. ekvivalentní

důk: nechť H je homotopie $f = H_1$ $g = H_0$

$$f^*\omega - g^*\omega = [d\hat{H} + \hat{H} d]\omega = d(\hat{H}\omega) \qquad \text{c.b.d.}$$

jinými slovy

Th pullbacky homotop. zobr. $f, g : M \to N$ na kohomolog. alg. jsou shodné

$$[f]^* = [g]^* \qquad \text{kde } [f]^*, [g]^* : H_{dR}(N) \to H_{dR}(M)$$

$$[f]^*[\omega] \overset{def}{=} [f^*\omega] \qquad [g]^*[\omega] \overset{def}{=} [g^*\omega]$$

důk:

$$[f]^*[\omega] - [g]^*[\omega] = [f^*\omega] - [g^*\omega] = [f^*\omega - g^*\omega] = 0 \qquad (= [d\hat{H}\omega])$$

Homotopické ekvivalence a kontrahovatelnost

Th: nechť M, N jsou homotopicky ekvivalentní, $M \simeq N$ $\Rightarrow$
kohomolog. gr. $H^p_{dR}(M)$ a $H^p_{dR}(N)$ jsou isomorfní (jako vekt. pr.)
kohomolog. alg. $H_{dR}(M)$ a $H_{dR}(N)$ jsou isomorfní jako grad. alg.

důkaz:

nechť $f: M \to N$, $g: N \to M$ jsou zobr. z defin. homotop. ekv. M, N

označme

$\varphi = g \circ f : M \to M$ homotopické s id_M

$\psi = f \circ g : N \to N$ homotopické s id_N

díky ekvivalenci pullbacků homotopických zobr na kohomologické gr. máme

$[id_M]^* = [\varphi]^* = [f]^* \circ [g]^*$: $H^p_{dR}(M) \to H^p_{dR}(M)$

$[id_N]^* = [\psi]^* = [g]^* \circ [f]^*$: $H^p_{dR}(N) \to H^p_{dR}(N)$

zobr.

$[f]^*$: $H^p_{dR}(N) \to H^p_{dR}(M)$

$[g]^*$: $H^p_{dR}(M) \to H^p_{dR}(N)$

tak jsou inverzní a kohomolog. gr. $H^p_{dR}(M)$ a $H^p_{dR}(N)$ isomorfní

tvrzení pro kohomolog. alg. plyne z tvrzení pro jednotl. kohomol. gr.
 linearity $[f]^*, [g]^*$ a jejich komutaci s vnější množ. $\wedge$

tato věta říká, že homotopické deformace jsou z hlediska
 kohomologie triviální
 přesný význam dává věta pro deformační retrakci - %

důsledky

$M \times \mathbb{R}$ a M jsou homotopicky ekviv

$\Rightarrow H^p_{dR}(M \times \mathbb{R}) = H^p_{dR}(M)$

Def: varieta M je kontrahovatelná na podvarietu N (též N je deformační retrakce variety M) pokud existuje $\phi: M \to N$ hladké tak, že $\phi|_N = id_N$ a ϕ je homologické id_M – nazýváme retrakce

Th: M je kontrahovatelné na N $\Rightarrow$
$H^p_{dR}(M)$ a $H^p_{dR}(N)$ jsou isomorfní jako vekt. p.
$H_{dR}(M)$ a $H_{dR}(N)$ jsou isomorfní jako grad. alg.

důk:
M a N jsou homologicky ekviv.
nechť $\bar{N}$ je vzor podvariety N a $\iota: \bar{N} \to M$ vložení $\bar{N}$ do M
$\bar{\Phi}: M \to \bar{N}$ retrakce
$\iota: \bar{N} \to M$ vložení
$\iota \circ \bar{\Phi} = \phi$ homotop. s id_M $\Leftarrow$ def. retrakce
$\bar{\Phi} \circ \iota = id_{\bar{N}}$ homotop. s $id_{\bar{N}}$
N a $\bar{N}$ jsou difeomorfní $\Rightarrow$ M a N homotop. ekv.

Th: M je kontrahovatelné na N $\Rightarrow$
kohomologická třída uzavřené formy ω na M je určena její restrikcí $\omega|_N$ na N

konkrétně: nechť $\phi: M \to N$ je retrakce a
H její homotopie k identitě na M, $H_1 = id_M$ $H_0 = \phi$
pro $\omega \in \Omega^p M$ $d\omega = 0$ máme

$$\omega = \phi^* \omega|_N + d(\hat{H}\omega)$$

kde restrikce $\omega|_N$ na podvar. N je též uzavřená, $d\omega|_N = 0$, tj. pro kohomologické třídy platí

$$[\omega] = [\phi]^* [\omega|_N] \qquad [\omega|_N] = [\iota]^* [\omega]$$

důkaz:
z vlastností homotop. oper. $\hat{H}$ máme

$$\underbrace{H_1^*}_{id_M^*}\omega - \underbrace{H_0^*}_{\phi^*}\omega = d\hat{H}\omega + \hat{H}\cancel{d\omega}^{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega = \phi^*\omega + d(\hat{H}\omega)$$

pullback $\phi^*\omega$ ale záleží pouze na restrikci $\omega|_N$, neboť ϕ lze přepsat pomocí vložení $\phi = \iota \circ \bar{\Phi}$ $\Rightarrow$ $\phi^* = \bar{\Phi}^* \circ \iota^*$
$\phi^*\omega = \bar{\Phi}^* \iota^* \omega = \bar{\Phi}^* \omega|_N$ přičemž ϕ a $\bar{\Phi}$ nerozlišujeme

Th (obrácené) Poincarého lemma
necht' M je kontrahovatelná do bodu $\Rightarrow$
$H_{dR}(M)$ je isomorfní $H_{dR}(\text{bod})$
konkrétně
$$H^p_{dR}(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & p=0 \\ \{0\} & p>0 \end{cases}$$
homotopický operátor $\hat{H}$ kontrakce H definuje potenciál uzavřené formy ω
$$\omega = d(\hat{H}\omega)$$

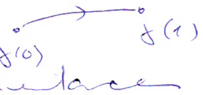
důkaz:
M je kontrah. do bodu $\Rightarrow$
existuje homotopie $H_\tau : M \to M$ $\quad H_1 = id_M \quad H_0 = const_{x_0}$
z vlast. homotop. oper. pro $\omega \in \Omega^p M$ $p>0$ $d\omega = 0$ máme
$$\underbrace{H_1^*}_{id_M^*}\omega - \underbrace{H_0^*}_{0}\omega = d\hat{H}\omega + \hat{H}\cancel{d\omega}^{\,0}$$
$0 \leftarrow$ pullback z 0-dim. var. $\{x_0\}$ $\quad\Downarrow$
$$\omega = d(\hat{H}\omega)$$
kde
$$\hat{H}\omega = \int_0^1 d\tau\, \iota_\tau^* \left(\frac{\partial}{\partial\tau} \cdot H^*\omega\right)$$

Fundamentální grupa

Def: parametr. křivka v M

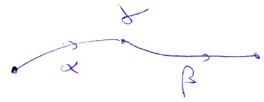
$\gamma : \langle 0,1 \rangle \to M$

$\gamma(0)$ počátek $\quad \gamma(1)$ konec $\quad$ orientace



Def: skládání param. kř.

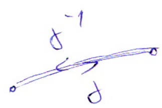
$\gamma = \alpha \circ \beta \qquad \gamma(\tau) = \begin{cases} \alpha(2\tau) & 0 \le \tau \le \frac{1}{2} \\ \beta(2\tau - 1) & \frac{1}{2} \le \tau \le 1 \end{cases}$



definováno pro navazující křivky $\alpha(1) = \beta(0)$

Def: inverze křivky

$\gamma^{-1}(\tau) = \gamma(1-\tau)$



operace $\circ$ a -1 nejsou grupové operace $\qquad \gamma \circ \gamma^{-1} \neq \mathrm{id}$

není definováno

zajímají nás křivky až na homotopickou ekvivalenci

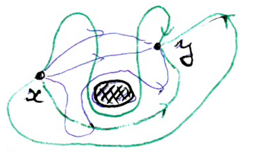
- zahrnuje ignorování spoj. deformace a přeparametriz.

Def: [homotopická] dráha z x do y $\equiv$

třída homotop. ekv. křivek z x do y, tj.

$[\gamma] \qquad \gamma(0) = x \qquad \gamma(1) = y$

zůstávají definovány počátek, konec, orientace

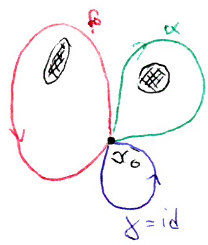


— a — tvoří nekv. křivky, tj. různé dráhy

Def: smyčka s počátkem v x_0 $\equiv$

dráha mající shodný začátek a konec v x_0

zůstává definován počátek a orientace



neekvival. par. křivky ⇒ různé smyčky

γ triviální

operace $\circ$ a -1 se dědí na dráhy a smyčky

smyčky v x_0 spolu s $\circ$ a -1 tvoří grupu

Def: první homotop. gr. = fundamentální grupa v x_0 $\equiv \Pi_1(M, x_0)$

prvky: smyčky v x_0

operace: skládání a inverze

Th: $\Pi_1(M, x_0)$ a $\Pi_2(M, y_0)$ jsou isomorfní (pro M dráhově spojitou)

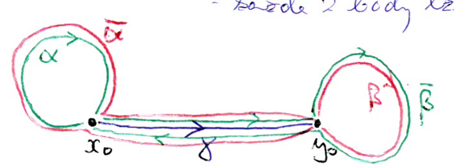
= každé 2 body lze spojit křiv.

důk: zvolme dráhu γ z x_0 do y_0

isomorf. mezi $\Pi_1(M, x_0)$ a $\Pi_2(M, y_0)$ jsou:

$(x_0 \to y_0 : \alpha_{x_0} \to \bar{\alpha}_{y_0} = \gamma^{-1} \circ \alpha_{x_0} \circ \gamma$

$(y_0 \to x_0 : \beta_{y_0} \to \bar{\beta}_{x_0} = \gamma \circ \beta_{y_0} \circ \gamma^{-1}$

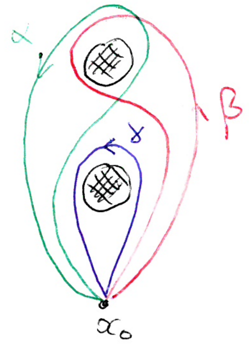


zachovává operace a jen dráhy

neexistuje kanonický isomorf. mezi gr. v různých bodech nekomutativita $\Pi_1(M, x_0)$

v topol. netriv. pr. $\Pi_1(M, x_0)$ není komutativní

Př.: mějme α, β, γ v $\mathbb{R}^2 \setminus \{A, B\}$



zřejmé $\alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha \circ \gamma \neq \beta \circ \gamma$

platí $\beta = \gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1}$

$\Rightarrow \beta \circ \gamma = \gamma \circ \alpha$

$\Rightarrow \alpha \circ \gamma \neq \gamma \circ \alpha$